Mechanisches Rechnen

Die Ewigkeitsmaschine

Dirk Fox

Viele wichtige mathematische Zusammenhänge werden in der Schule nur in der Theorie vermittelt. Da sie sich damit der unmittelbaren Anschauung entziehen, wird ihre Bedeutung oft nicht verstanden. Einige dieser Zusammenhänge könnte man mit einem mechanischen fischertechnik-Modell sehr anschaulich darstellen – wie zum Beispiel exponentielles Wachstum.

Hintergrund

Exponentielles Wachstum können sich Menschen nachweislich nur sehr schwer vorstellen [1]. Dabei war und ist das Verständnis exponentiellen Wachstums entscheidend für eine angemessene Reaktion auf sehr viele – nicht zuletzt (geo-) politische – Herausforderungen, wie beispielsweise die Entwicklung des Bevölkerungswachstums in Entwicklungsländern bei einer Verbesserung der medizinischen Versorgung oder die Ausbreitung von ansteckenden Krankheiten.

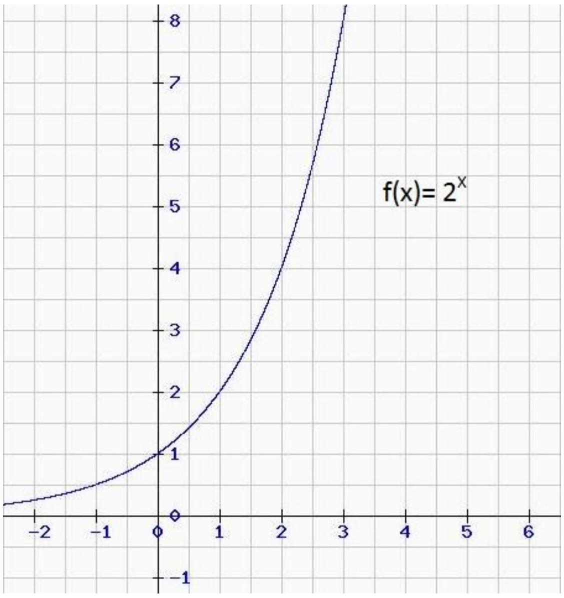

Abb. 1: Verlauf der Exponentialfunktion 2^x

Natürlich lernt man im Schulunterricht, wie eine Exponentialfunktion verläuft (Abb. 1). Aber kann man sich unter einer solchen Grafik wirklich etwas Konkretes vorstellen?

Dabei haben wir es im täglichen Leben immer wieder mit Fragen zu tun, die man nur richtig beantworten kann, wenn man sich klarmacht, dass exponentielles Wachstum hinter dem Phänomen steckt – und dann genauer nachrechnet. Dazu zählt z. B. die Frage, wie viel Geld ein um 0,25 % geringerer Kreditzins beim Wohnungskauf über die Laufzeit spart oder welcher Kaufkraftverlust eintritt, wenn das Gehalt fünf Jahre lang nicht steigt.

Richtig – man lernt in der Schule auch, wie man das ausrechnet: Mit der Zinsformel, die das aktuelle Kapital K bei festem Zinssatz Z aus einem Anfangskapital K_A bestimmt:

$$K = K_A \cdot (1 + Z)^n$$

Dabei steht n für die Zahl der Sparjahre.

Wenn allerdings n und K_A sehr klein sind, ist die Wirkung des Zinseszinseffekts nicht sichtbar. Anschaulicher wird das erst bei einem etwas „größeren" Beispiel.

So verkauften die Indianer im Jahr 1627 die Insel Manhattan angeblich für 24 \$ an den Niederländer Pieter Minnewit [2].

Hätten sie den Betrag damals mit 4 % Zinsen über die seither vergangenen 388 Jahre angelegt und nicht angetastet, wäre daraus ein Vermögen geworden, nämlich:

$$K = 24 \cdot 1{,}04^{388} = 97.531.946\ \$$$

Das könnte heute glatt für ein kleineres Grundstück reichen.

So anschaulich das Beispiel ist – zu Lebzeiten hätten die Indianer davon nichts gehabt.

Ein zweites Beispiel mit einem vielleicht noch überraschenderen Ergebnis: Angenommen, wir besäßen ein riesiges Stück 90g-Papier mit einer Materialstärke von 0,09 mm. Wie oft müssen wir dieses Papier falten, um den Abstand zwischen Erde und Mond (384.400 km) zu überbrücken?

Na, was schätzt ihr?

Und jetzt überprüft eure Schätzung bitte anhand der folgenden einfachen Rechnung:

$$0{,}09\ \mathrm{mm} \cdot 2^n = 384.400\ \mathrm{km}$$

$$2^n = \frac{384{,}4 \cdot 10^{11}}{9}$$

$$n = \frac{\log(42{,}71 \cdot 10^{11})}{\log 2}$$

Und? Wie oft müsst ihr falten?

Das Ergebnis wird euch (die Informatiker ausgenommen [3]) sicherlich überraschen. Es ist ein sehr schönes Beispiel dafür, wie schwer es dem menschlichen Gehirn fällt, exponentielles Wachstum nachzuvollziehen [1]. Aber auch für dieses Beispiel gilt: Es hat keinen Realitätsbezug. Wie sollte man denn beispielsweise die letzte Faltung vornehmen?

Übersetzungen

Tatsächlich gibt es eine sehr viel anschaulichere Möglichkeit, um exponentielles Wachstum ganz real „sichtbar" zu machen.

Die Idee geht zurück auf eine Skizze Leonardo da Vincis (1452-1519) aus dem lange verschollenen und erst 1953 wiederentdeckten Codex Madrid (Abb. 2). Sie zeigt, wie durch eine wiederholte Untersetzung das Drehmoment an einem Seilzug verstärkt wird.

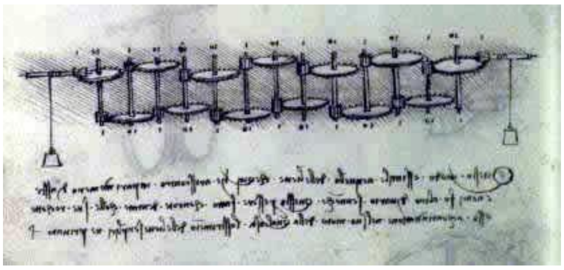

Abb. 2: Codex Madrid (Leonardo da Vinci)

Anfang des Jahrtausends installierte der US-amerikanische „Maschinen-Künstler" Arthur Ganson (*1955) [4] eine „*Machine with Concrete*" (Abb. 3), die demselben Prinzip folgt. Er schaltete 12 Untersetzungen 1:50 hintereinander, montierte für das erste Zahnrad einen Antrieb mit 200 U/min – und verschraubte das letzte Zahnrad mit einem Granitblock.

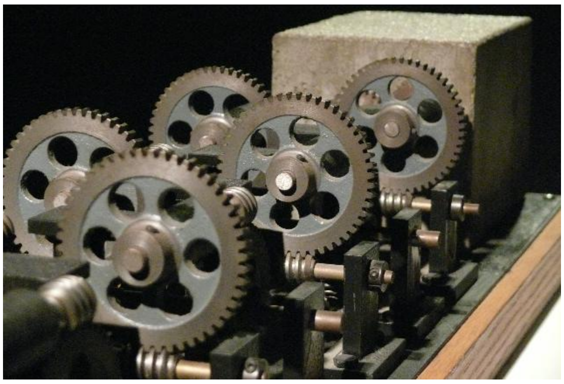

Abb. 3: Machine with Concrete von Arthur Ganson (Foto: Shervinafshar, CC BY-SA 3.0)

Warum letzteres kein Problem darstellt, kann man leicht nachrechnen: Mit jeder Untersetzung reduziert sich die Geschwindigkeit G um den Faktor 50. Bei 12 Untersetzungen gilt also für das letzte Zahnrad:

$$G = 200 \cdot 50^{-12} \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$$

Oder, anschaulicher dargestellt: Die Zeit T, die erforderlich ist, damit das letzte Zahnrad sich um einen Zahn weiterdreht (sich also das elfte Zahnrad einmal komplett gedreht hat), liegt etwa bei:

$$T = \frac{50^{11}}{200} \mathrm{min} = 46.449.890.601\ \mathrm{Jahren.}$$

46,45 Milliarden Jahre – das dürfte der kleine Motor schwerlich überleben.

Eine solche Ewigkeitsmaschine lässt sich natürlich auch mit fischertechnik konstruieren. Martin Romann hat das getan – und am 28.10.2012 ein Video seiner Maschine auf YouTube publiziert (Abb. 4).

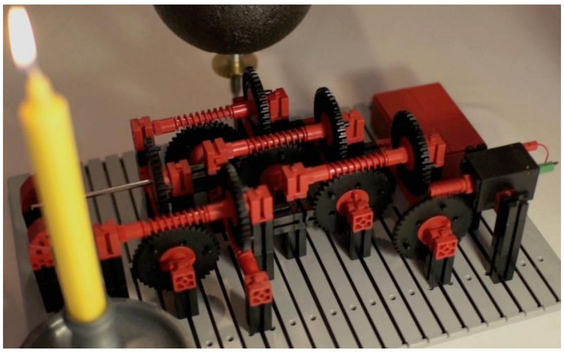

Abb. 4: Ewigkeitsmaschine (Martin Romann)

Dabei hat er die maximale mit einem fischertechnik-Getriebe realisierbare Untersetzung von 1:40 (Schnecke auf Z40) verwendet.

Eine Ewigkeitsmaschine mit zehn Z40 lässt sich sogar noch etwas kompakter auf einem Experimentierboard unterbringen (Abb. 5).

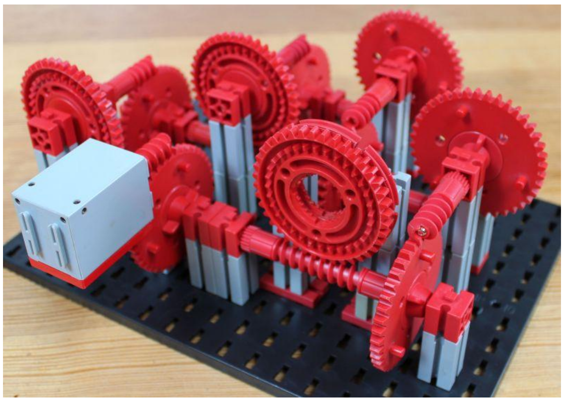

Abb. 5: Ewigkeitsmaschine auf einer Experimentierplatte

Montiert man das letzte Z40 fest und schließt vorne einen guten alten grauen fischertechnik-Motor an (8.000 U/min bei 9V Betriebsspannung), dann berechnet sich die Zeit *T*, die vergeht, bis das letzte (zehnte) Z40 um einen Zahn weitergedreht wurde, wie folgt:

$$T = \frac{40^9}{8000} \text{min} = 62.343{,}98 \text{ Jahre}$$

Unwahrscheinlich, dass der graue Motor (mit bereits 40 Jahren „Berufserfahrung“) das noch erlebt.

Aber mit diesem Modell lässt sich exponentielles Wachstum „zum Anfassen“ konstruieren: ideal für eine anschauliche Mathematikstunde.

Eine fischertechnik-Designer-Datei des Modells gibt es hier zum Download.

Quellen

[1] Dietrich Dörner: *Die Logik des Misslingens. Strategisches Denken in komplexen Situationen*. rororo, 1992.

[2] Rulf Neigenfind: *Wie erklären Sie jemand, der Sie fragt, wie ein Computer funktioniert, wie ein Computer funktioniert?* IBM Deutschland, 1980.

[3] Douglas Adams: *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*. Del Rey, 1978.

[4] Arthur Ganson: *Machines*.